

ชั่วโมงที่ 3-4 วันที่ 20 -21 กรกฎาคม 2563

จากบทนิยามที่ 5

### บทนิยาม 5

ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับอนันต์ ถ้า  $n$  มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว  $a_n$  เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง  $L$  เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเขียน  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ  $a_n$  เมื่อ  $n$  มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ  $L$ ) และจะเรียก  $L$  ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่าลำดับนี้มีลิมิตเท่ากับ  $L$  เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า ลำดับลู่เข้า (convergent sequence) และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า ลำดับลู่ออก (divergent sequence)

ทฤษฎีที่ 4 และ 5

#### ทฤษฎีบท 4

ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับซึ่ง  $a_n \neq 0$  สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$

ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  แล้ว ลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  จะลู่ออก

#### ทฤษฎีบท 5

ให้  $a_n$  เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์  $L$  เป็นจำนวนจริง และ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[n]{L}$$

ตัวอย่างที่ 27

จงตรวจสอบว่าลำดับ เมื่อ  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$  เป็นลำดับคู่เข้าหรือลำดับคู่ออก

ตัวอย่างที่ 29

จงหาขีดจำกัดของลำดับ เมื่อ  $a_n = \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}}$

ลักษณะโจทย์และเทคนิควิธีหาค่าลิมิต ลำดับ เมื่อ  $n$  เข้าสู่  $\infty$

การหาลิมิตของลำดับซึ่งมี  $a_n$  อยู่ในรูปเศษส่วนพหุนาม สามารถสรุปได้ ดังนี้

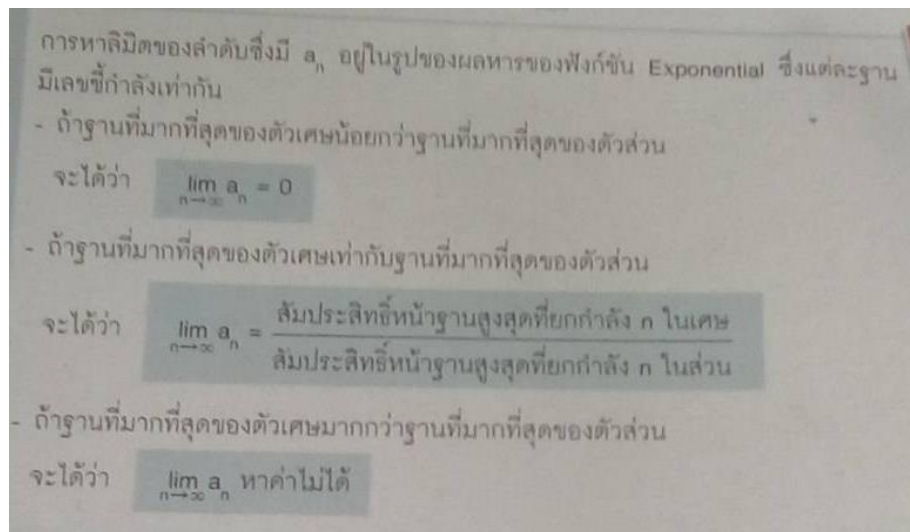
- ถ้าตัวเศษมีกำลังสูงสุดของ  $n$  น้อยกว่าตัวส่วน  
จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ถ้าตัวเศษและตัวส่วนมีกำลังสูงสุดของ  $n$  เท่ากัน  
จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\text{สัมประสิทธิ์ของ } n \text{ ที่ยกกำลังสูงสุดในเศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของ } n \text{ ที่ยกกำลังสูงสุดในส่วน}}$
- ถ้าตัวเศษมีกำลังสูงสุดของ  $n$  มากกว่าของตัวส่วน  
จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตของลำดับ  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

จงหาค่าลิมิตของลำดับ  $a_n = \frac{2n^2-1}{n^3+1}$

จงหาค่าลิมิตของลำดับ  $a_n = \frac{4n^2}{5n^2+1}$

จงหาค่าลิมิตของลำดับ  $a_n = \sqrt{\frac{2n-1}{5n+3}}$



ตัวอย่าง จงหาค่าขีดจำกัดของลำดับ  $a_n = \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{6^n - 100 \cdot 4^n}$

ตัวอย่าง จงหาค่าขีดจำกัดของลำดับ  $a_n = \frac{5^n - 10 \cdot 2^n}{10 \cdot 3^n}$

ตัวอย่าง จงหาค่าขีดจำกัดของลำดับ  $a_n = \frac{2 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n}{3 \cdot 3^n + 4 \cdot 2^n}$

ตัวอย่าง จงหาค่าขีดจำกัดของลำดับ  $a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{5^{n+2}}$

ตัวอย่าง จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ เพื่อตรวจสอบว่าลำดับในแต่ละข้อเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1.  $a_n = -\frac{1}{2}$  .....

2.  $a_n = \frac{3}{2n}$  .....

3.  $a_n = \frac{3n}{2}$  .....

4.  $a_n = \frac{4n}{n^2 + 3}$  .....

5.  $a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$  .....

6.  $a_n = \frac{4n^2 - 5n + 3}{7n^2 + 2n - 5}$  .....

7.  $a_n = \frac{3n^2 - 5n}{7n - 1}$  .....

8.  $a_n = \frac{7n^2}{5n^2 - 5}$  .....

9.  $a_n = \frac{4n^2 - 2n + 3}{n^2}$  .....

10.  $a_n = \frac{\sqrt{n} - 2 \cdot \sqrt[3]{n} + 1}{3\sqrt{n} + 4 \cdot \sqrt[3]{n} - 6}$  .....

11.  $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3}$  .....ทำส่วนให้เท่ากัน.....

12.  $a_n = \sqrt{\frac{16n+3}{9n-4}}$  .....

13.  $a_n = \sqrt{\frac{3-8n^2}{n^2+1}}$  .....

14.  $a_n = \frac{2^n - 5^n}{5^n + 9}$  .....

15.  $a_n = \log_2 \left( \frac{12 \cdot 2^n - 3}{5 + 3 \cdot 2^{n+1}} \right)$  .....



